AGÊNCIA NACIONAL
PARA A CULTURA
CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - UTAD

Medições e suas incertezas

Ação no âmbito do PEC 115

UTAD, 6 de setembro de 2013

Joaquim Anacleto

Programa da ação

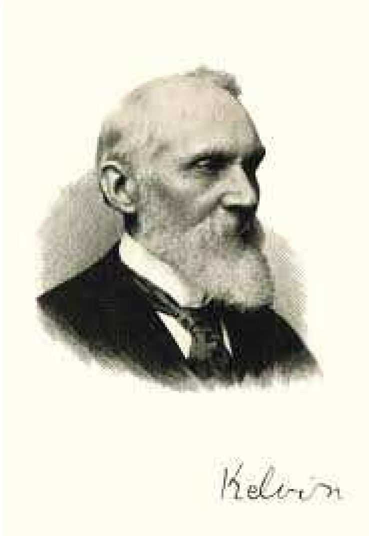
- Apresentação dos conceitos (1 h)
- Pausa para café (15 min)
- Medições e discussão (1 h)
  - Massa volúmica do aço
  - Densidade de uma folha de papel A4
- Resolução de questões teórico-práticas (? min)

Sumário

- Conceitos fundamentais
- Instrumentos de medição
- Erros aleatórios
- Algarismos significativos
- Propagação de erros
- Representação gráfica

To measure is to know.

There is nothing new to be discovered in physics now, all that remains is more and more precise measurement.



Nos trabalhos experimentais há sempre erros associados aos valores medidos

Exemplo das constantes fundamentais

São determinadas experimentalmente em organismos tais como

NIST - National Institute of Standars and Technology | www.nist.gov

NPL – National Physical Laboratory | www.npl.co.uk

$$N_{\mathrm{A}} = (6{,}022\,141\,79 \pm 0{,}000\,000\,30) \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$$

$$R_{\infty} = (10\,973\,731{,}568\,527 \pm 0{,}000\,073)\ \mathrm{m}^{-1}$$

Há constantes exatas (i.e. não têm erro), e.g. $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s}^{-1}$

Lista completa de constantes físicas em physics.nist.gov/cuu/Constants

CODATA – Committee on Data for Science and Technolgy

The NIST Reference on
Constants, Units, and Uncertainty

Fundamental Physical Constants

Constants Topics:
- **Values**
- Energy Equivalents
- Searchable Bibliography
- Background
- Constants Bibliography
- Constants, Units & Uncertainty home page

electron mass
m_e

Value	$9.109\ 382\ 91 \times 10^{-31}$ kg
Standard uncertainty	$0.000\ 000\ 40 \times 10^{-31}$ kg
Relative standard uncertainty	4.4×10^{-8}
Concise form	$9.109\ 382\ 91(40) \times 10^{-31}$ kg

Click here for **correlation coefficient** of this constant with other constants

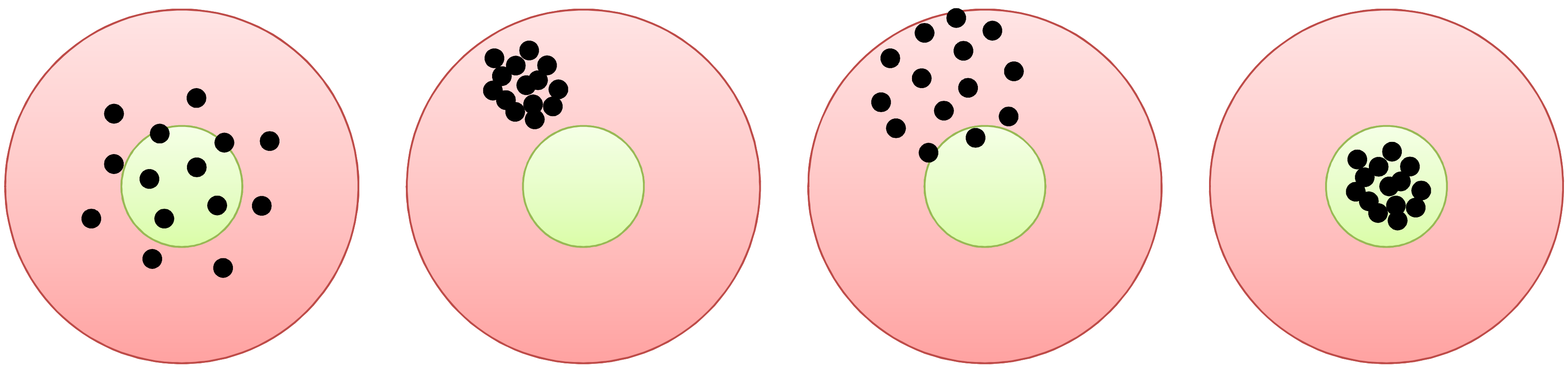
Source: 2010 CODATA recommended values | Definition of uncertainty | Correlation coefficient with any other constant

VIM_IPQ_INMETRO_2012.pdf

Erro vs incerteza (frequentemente tomados como sinónimos)

Exatidão – diferença entre o valor encontrado na medição e o verdadeiro valor da grandeza medida

Precisão – proximidade entre os diversos valores encontrados em medições repetidas da mesma grandeza

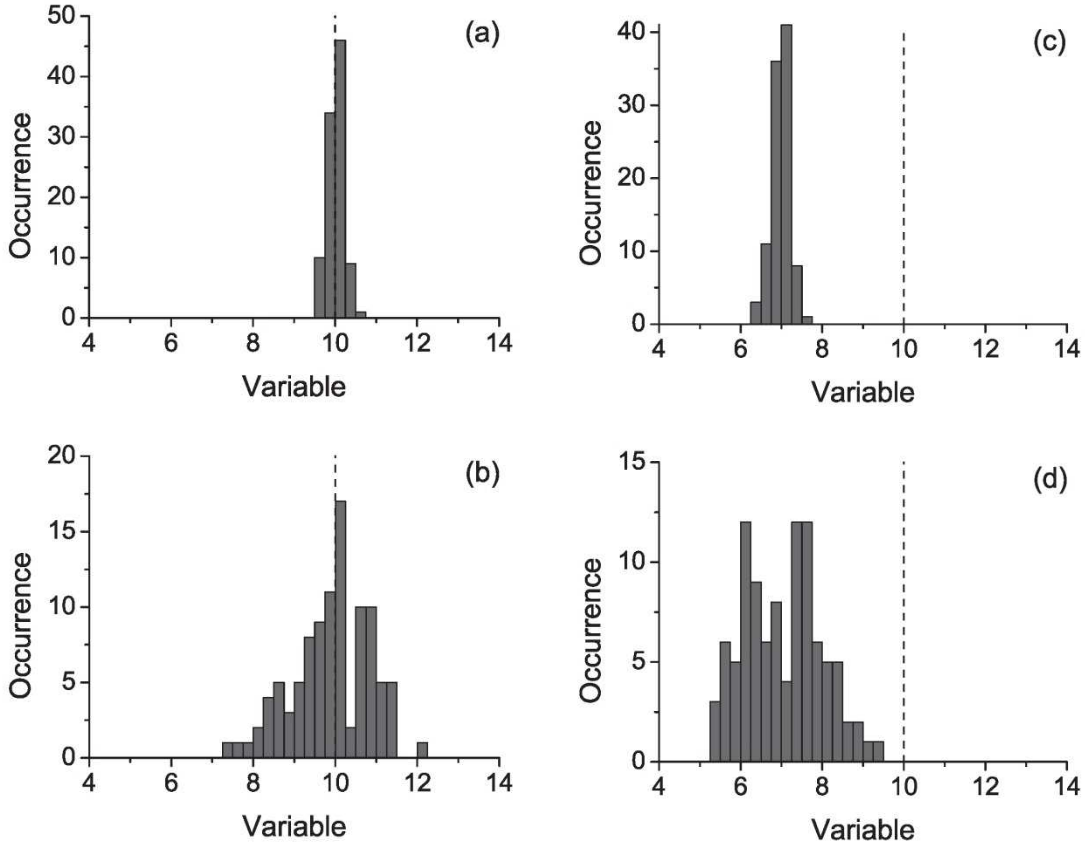


Exacto e pouco preciso | Preciso e pouco exacto | Pouco preciso e pouco exacto | Preciso e exacto

Ref. [2]

Os erros podem ser:

Erros aleatórios – influenciam a precisão da medição
Erros sistemáticos – influenciam a exatidão da medição
Erros grosseiros (enganos) – maus pontos experimentais



Histogramas
com resultados
de 100 medições
de uma variável

(a) Preciso e exato
(b) Impreciso e exato
(c) Preciso e inexato
(d) Impreciso e inexato

Ref. [3]

Física Experimental | redução dos erros aleatórios

A melhor estimativa para uma grandeza é a média dos valores medidos

O erro está associado à sua distribuição em torno da média - desvio padrão

Origem da dispersão dos dados

Um **instrumento** tem um ruído fundamental (e.g. difração), mas tipicamente opera com um nível de ruído maior (ruído técnico), que pode, em princípio, ser diminuido

É possível conceber experiências tão aperfeiçoadas que a origem dos erros aleatórios se aproxima do limite do ruído fundamental do instrumento

Uma vez alcançado o nível de ruído fundamental, uma melhoria da medição requer um novo instrumento e/ou novo método experimental

Os erros sistemáticos causam um desvio do valor medido, relativamente ao valor teórico | aceite | previsto

Quanto menor o desvio, mais exata é a medição

Ao contrário dos erros aleatórios, não existem técnicas estatísticas para quantificar os erros sistemáticos

→ Implementação de outras medições que possam dar informação sobre a origem de discrepâncias sistemáticas

↓

Calibração do instrumento de medição

São de natureza semelhante aos erros sistemáticos,
mas podem ser difíceis de detetar → Manual de procedimentos

Exemplos

Escrever 2,34 em vez de 2,43 é um engano (se não for imediatamente corrigido pode ser dificil de compensar mais tarde)

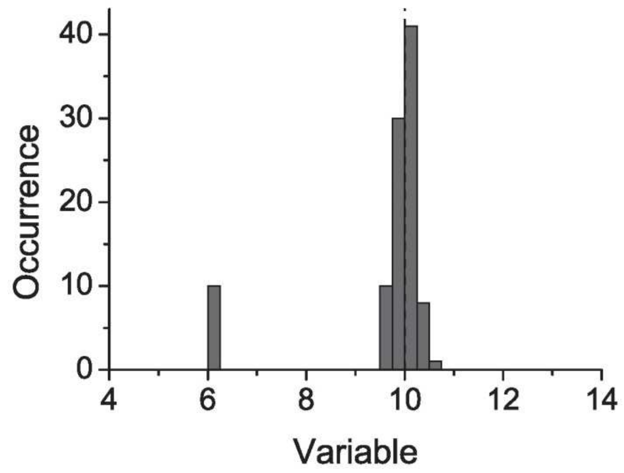
Leituras erradas em escalas

Osciloscópio: multiplicador x10 selecionado

Mau-funcionamento do instrumento

Confusão entre unidades

Os pontos errados podem tornar-se evidentes quando os dados são representados graficamente | **Quando detetados devem ser eliminados**



Histograma de acontecimentos, onde 10% dos registos automáticos falham
Ref. [3]

Há certas medições sem dispersão estatística

Exemplo

Se 6 medidas sucessivas forem [25,0 25,0 25,0 25,0 25,0 25,0] , é óbvio que é uma perda de tempo realizar mais medições

Neste caso a precisão da medição é limitada pela resolução do instrumento

A precisão de uma medição apenas iguala a precisão do instrumento de medida quando todos os resultados de repetidas medições são idênticos

Precisão de um instrumento analógico

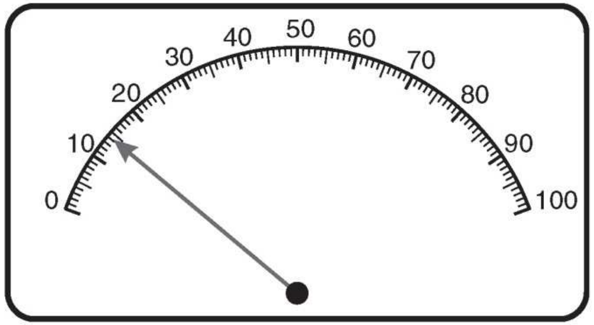
Metade de uma divisão: $297{,}0 \pm 0{,}5$ mm

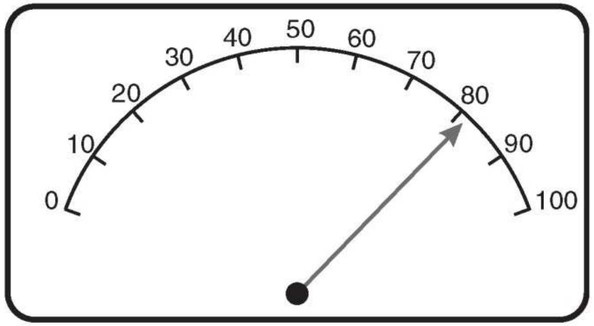
Nem sempre deve ser assim!

Imaginemos que medimos o comprimento da folha A4 com uma régua dividida em cm

Todas as medições originam valores entre 29 e 30 cm; neste caso tomar a incerteza ±0,5 cm é uma estimativa grosseira

Um bom experimentalista será capaz de interpolar, i.e. estimar a posição com uma resolução mais fina que a escala





Ref. [3]

Precisão de um instrumento digital

Repetidas medições com um voltímetro digital dão 8,41 V

Qual a incerteza da medição?

O instrumento **arredonda** o resultado
Neste caso tomamos como **incerteza** (absoluta) metade do último digito

$$8{,}410 \pm 0{,}005 \text{ V}$$

Note-se que aparece um zero extra, que não está presente na leitura

O instrumento **trunca** o resultado
Neste caso tomamos como incerteza o último digito

$$8{,}41 \pm 0{,}01\text{V}$$

Incerteza (ou erro) **relativa**

$$0{,}01 / 8{,}41 = 0{,}0012 \quad | \quad 8{,}41 \text{ V} \pm 0{,}12\%$$

A exatidão de uma medição é determinada pelos erros sistemáticos

Fontes mais comuns de erros sistemáticos

zero | calibração | erros de inserção

Exemplos

Erro de zero – usar uma régua com a extremidade gasta

Pode eliminar-se estes erros com medições diferenciais

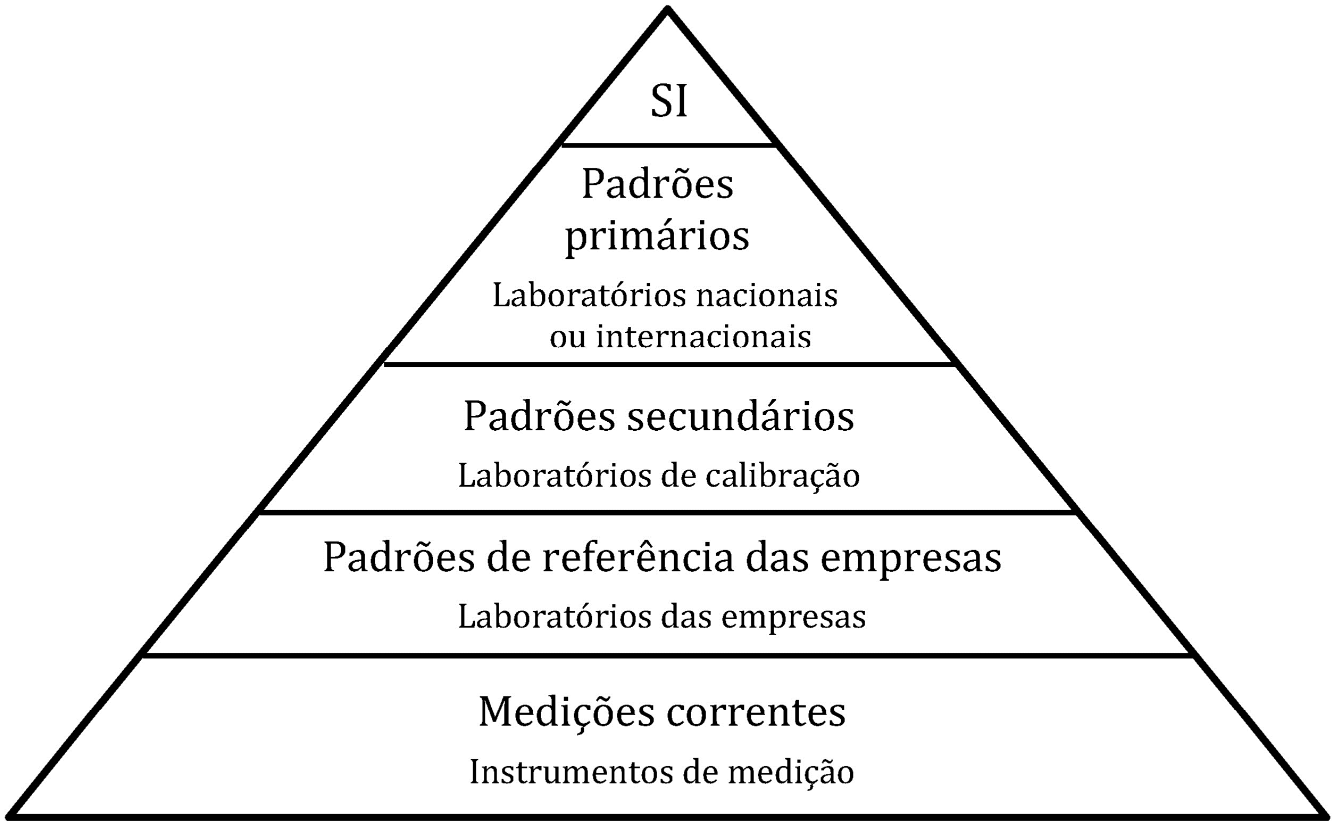
Erro de calibração – uma régua calibrada a 20^{o}C dá resultados que são demasiado grandes se for usada a 10^{o}C (devido à contração térmica)

Erro de inserção – colocar um termómetro à temperatura ambiente num fluido quente; inserir um voltímetro num componente elétrico, etc.

A calibração garante a rastreabilidade das medições

- Certificado de calibração -

http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/



Cadeia metrologia: da definição das unidades SI até às medições correntes.

Alcance de medida (régua, 0-30cm)

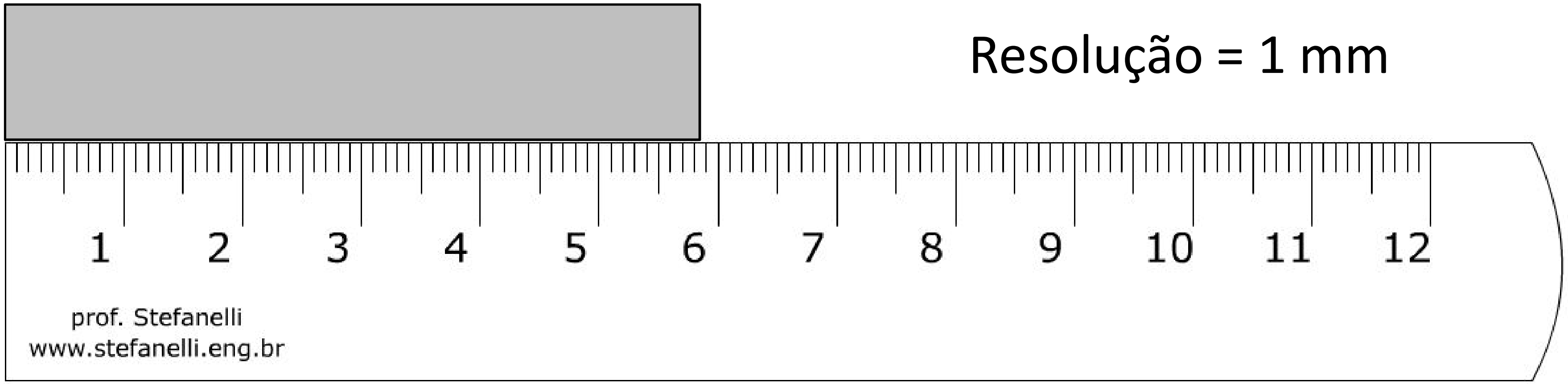
Tempo de resposta (termopar, 1s)

Sensibilidade (termopar, 10μV/K)

Exatidão (requer calibração)

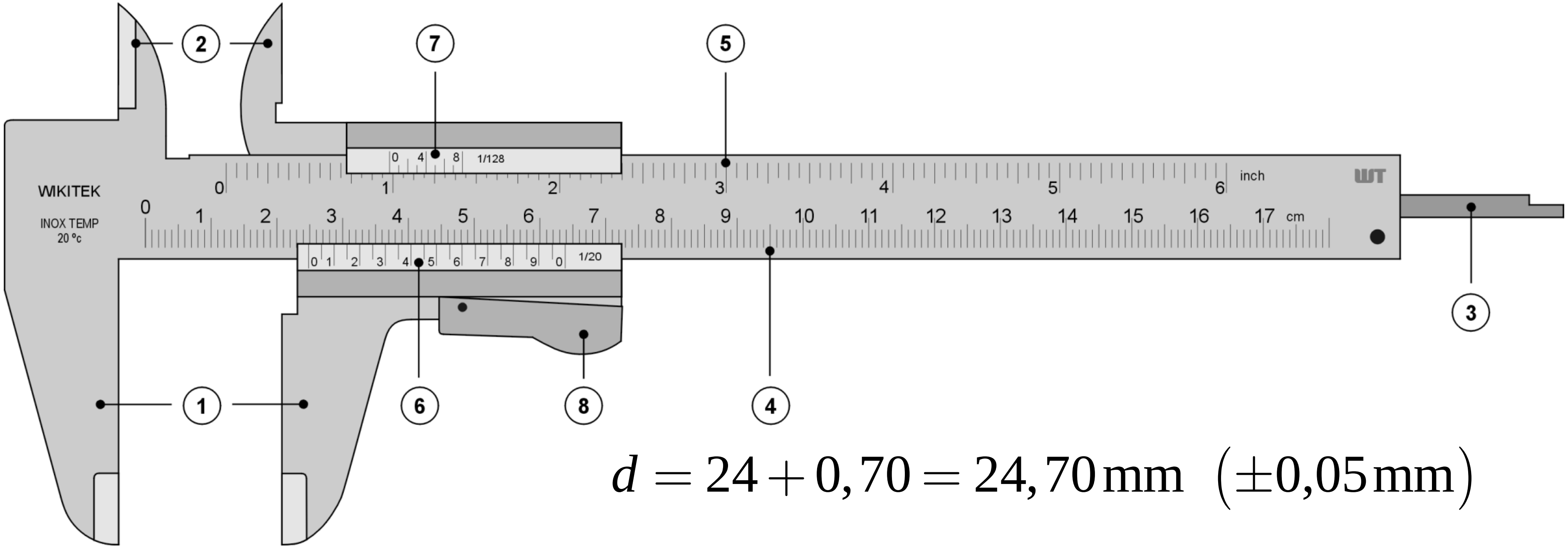
Precisão (depende do ruído fundamental e técnico)

Cada instrumento tem características e normas específicas de funcionamento
Por exemplo: ligar o instrumento 1 hora antes de iniciar a medição



Resolução = 1 mm

$$d = 58{,}5\,\text{mm}\ \left(\pm 0{,}5\,\text{mm}\right)$$



$$d = 24 + 0,70 = 24,70\,\mathrm{mm} \quad (\pm 0{,}05\,\mathrm{mm})$$

Natureza do nónio (resolução) - Menor valor que se pode medir

$$r = \frac{\text{valor da menor divisão da escala principal}}{\text{nº de divisões do nónio}}$$

Instrumentos de medição | Palmer

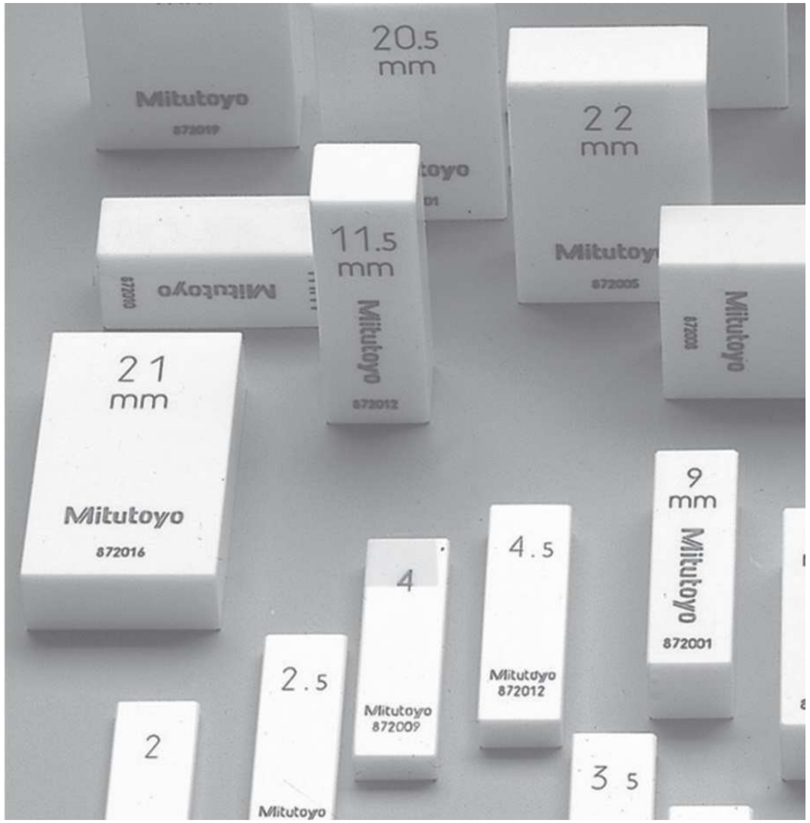
No.	Range [mm]	Accuracy	Data output	L [mm]	a [mm]	b [mm]	Mass [g]	Price [€]
293-140	0-25	±1 µm	●	0	9	25	265	290.00
293-145	0-25	±1 µm		0	9	25	265	205.00
293-141	25-50	±1 µm	●	25	9.8	32	325	358.00
293-146	25-50	±1 µm		25	9.8	32	325	282.00
293-142	50-75	±1 µm	●	50	12.6	47	465	433.00
293-147	50-75	±1 µm		50	12.6	47	465	338.00
293-143	75-100	±2 µm	●	75	14	60	620	493.00
293-148	75-100	±2 µm		75	14	60	620	383.00

Specifications	
Accuracy	Refer to the list of specifications (excluding quantizing error)
Digital step	0,001 mm
Flatness	0,3 µm
Parallelism	1 µm for models up to 50 mm 2 µm for models up to 100 mm
Measuring surfaces	carbide-tipped, micro-lap finish
Measuring spindle	With spindle lock, ø6,35mm, 2 mm spindle pitch
Measuring force	7-12 N
Battery life	approx. 1.2 year
Delivered	Including box, key, 1 battery, setting standard (from 25 mm upward), certificate of inspection (0-50 mm range)

$$d = 7{,}5 + 0{,}22 = 7{,}72\,\mathrm{mm}\ \left(\pm 0{,}01\,\mathrm{mm}\right)$$

O comparador faz medições diferenciais

Resolução = 0,01 mm



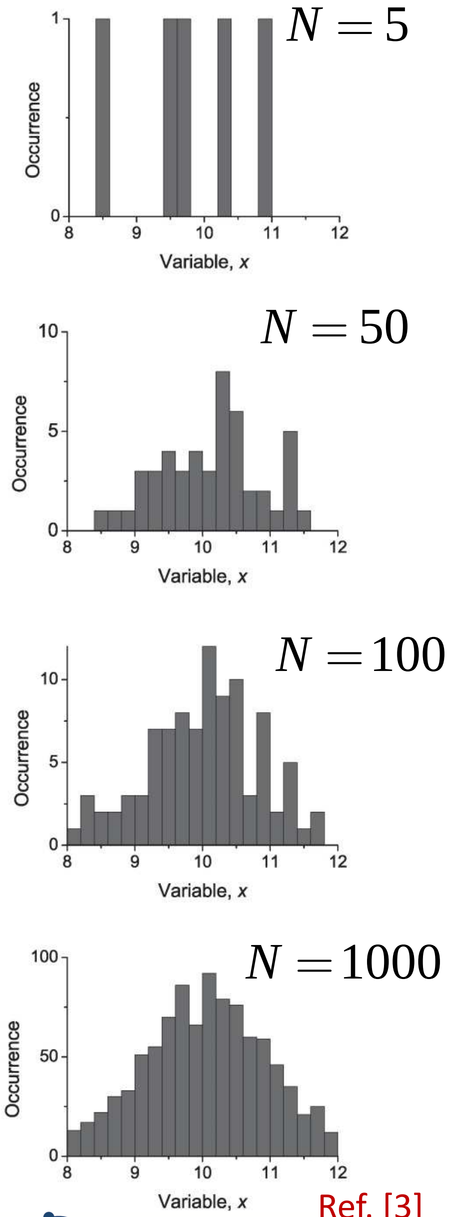
Utilizados em calibrações

Os de maior exatidão (classe 00) constituem padrões primários de comprimento

Associação de blocos padrão

20,0000 + 10,0000 + 50,0000 (mm)

Erros aleatórios nas medições



Ref. [3]

À medida que o nº de pontos aumenta, a distribuição torna-se mais suave, mas a sua largura mantém-se

Média

Considerando N medições, o valor mais provável de x é a média

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_N\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

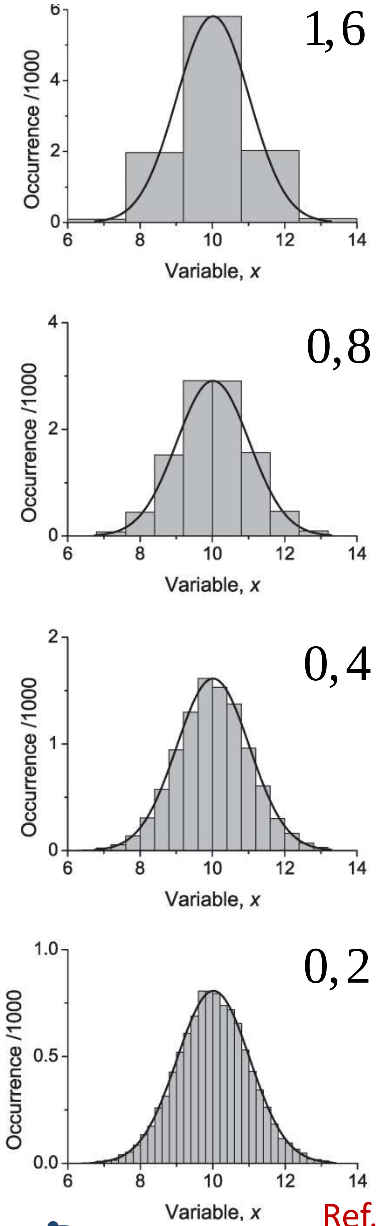
Qual a incerteza no valor de x? $N \leq 10$

Desvio máximo $d_{\max} = \left|x_i - \bar{x}\right|_{\max} \Longrightarrow x = \bar{x} \pm d_{\max}$

Desvio padrão $\sigma = \frac{2}{3} d_{\max} \Longrightarrow x = \bar{x} \pm \sigma$

Desvio médio $\bar{d} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \bar{x}\right| \Longrightarrow x = \bar{x} \pm \bar{d}$

Erros aleatórios nas medições



Ref. [3]

Histogramas para 10 000 medições | À medida que a largura das barras diminui, o histograma tende para uma distribuição contínua – **distribuição normal** ou **Gaussiana**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$N \rightarrow \infty$

$N > 10$

Desvios relativamente à média: $d_i = x_i - \overline{x}$

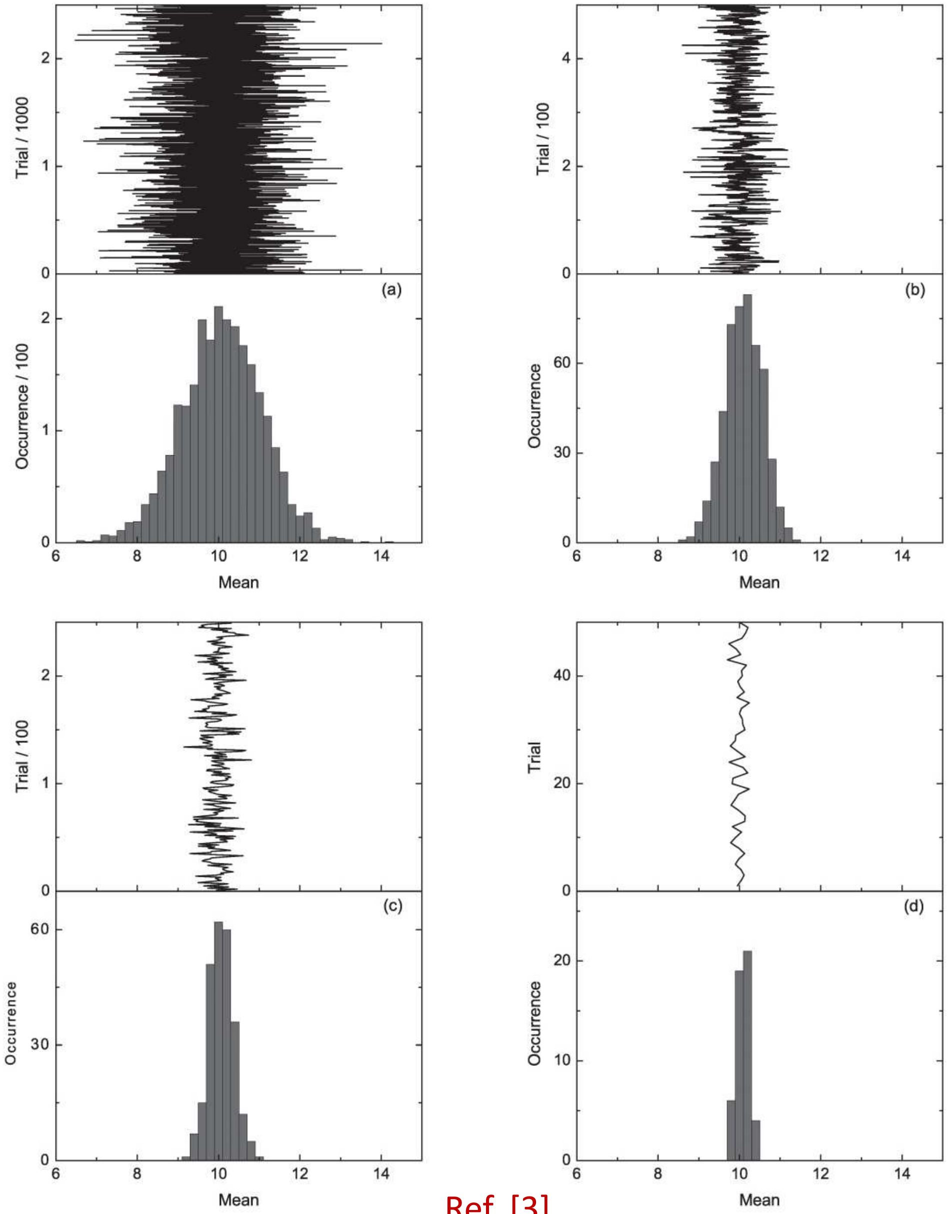
Desvio padrão

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{\left(d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_N^2\right)}{N-1}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^2}$$

Resultado

$$x = \overline{x} \pm \sigma_{N-1}$$

O desvio padrão **não** é uma boa medida do erro da média! Porquê?



Ref. [3]

O **erro padrão** – a incerteza da média

Conceito fundamental
À medida que o número de medições aumenta, o histograma torna-se mais suave, mas o desvio padrão não diminui

Podemos determinar o valor da média com mais precisão do que σ

Erro padrão

$$\alpha = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$$

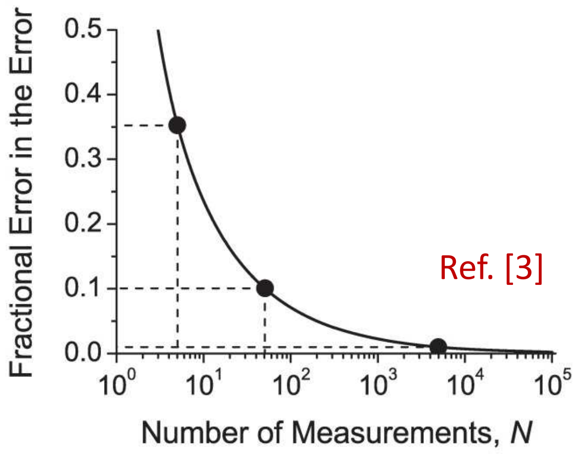
Resultado

$$x = \bar{x} \pm \alpha$$

Como reportar o melhor valor e a sua incerteza?

Precisamos de quantificar erro do erro

$$\text{erro relativo do erro} = \frac{1}{\sqrt{2N-2}}$$



O erro relativo do erro só é pequeno ($\ll 1\%$) quando $N > 10\,000$
Neste caso podemos considerar 2 algarismos significativos no erro

Quando $N \ll 10\,000$, considerar **apenas 1 algarismo significativo, exceto** se o 1º algarismo do erro é 1 (considerar o 2º algarismo como significativo)

Não há critério para o nº de algarismos significativos da média

- este é apurado depois do erro (e do seu erro) serem determinados -

Algarismos significativos

Não havendo indicação do erro, este é a unidade do último algarismo

97 Ω	±1 Ω	2 (ou 3) algarismos significativos
100,04 Ω	±0,01 Ω	5 algarismos significativos

Exemplos

$2,998\times10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}$ (4)

$6,022\,141\,79\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ (9 ou 10)

$0,51\times10^{23}\,\mathrm{MeV}$ (2)

$1,60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ (3)

270Ω (?) $0,27\ \mathrm{k\Omega}$ ou $2,7\times10^{2}\,\Omega$ (2)

$0,270\ \mathrm{k\Omega}$ ou $2,70\times10^{2}\,\Omega$ (3)

Exemplos

$$6,62\times10^{-34} \rightarrow 6,6\times10^{-34}\ (2)$$

$$5,67\times10^{-8} \rightarrow 5,7\times10^{-8}\ (2)$$

$$3,45 \rightarrow 3,4\ (2)$$

$$3,55 \rightarrow 3,6\ (2)$$

Soma

$$1,23+45,6=46,83 \rightarrow 46,8\ \text{(1 casa decimal)}$$

Produto

$$\begin{cases} 1,2\times345,6=414,72 \rightarrow 4,1\times10^{2}\ (2) \\ \Delta(xy)=1,2\times0,1+345,6\times0,1=34,68\approx0,3\times10^{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6,22\times345,6=2149,632 \rightarrow 2,150\times10^{3}\ (4) \\ \Delta(xy)=6,22\times0,1+345,6\times0,01=4,078\approx0,004\times10^{3} \end{cases}$$

Resumo

Analisar os dados experimentais e **calcular a média**
– manter todos os algarismos –

Calcular o **erro padrão**
– manter todos os algarismos –

Determinar os **algarismos significativos do erro**
– considerando o **valor de N** –

Arredondar a média apropriadamente

Incluir as unidades

Medindo a variável A, determinamos a média $\bar{A}$ e o erro padrão α_A

Consideremos a função $Z = f(A)$

O valor mais provável de Z é $\bar{Z} = f(\bar{A})$

Mas a incerteza de Z é uma função de A e da sua incerteza

$$\alpha_Z = \left| f(\bar{A} + \alpha_A) - f(\bar{A}) \right|$$

Se α_A for pequeno

$$\alpha_Z = \left| \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}A} \right| \alpha_A$$

E o que se passa para funções de mais que uma variável?

Consideremos a função $Z = f\left(A, B, C, ...\right)$

O valor mais provável de Z é $\bar{Z} = f\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ...\right)$

Mas a incerteza de Z é uma função de **todas** as variáveis e das suas incertezas

$$\alpha_Z^A = \left| f\left(\bar{A}+\alpha_A, \bar{B}, \bar{C}, ...\right) - f\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ...\right)\right|$$

$$\alpha_Z^B = \left| f\left(\bar{A}, \bar{B}+\alpha_B, \bar{C}, ...\right) - f\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ...\right)\right|$$

$$\alpha_Z^C = \left| f\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}+\alpha_B, ...\right) - f\left(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, ...\right)\right|$$

...

$$\alpha_Z = \sqrt{\left(\alpha_Z^A\right)^2 + \left(\alpha_Z^B\right)^2 + \left(\alpha_Z^C\right)^2 + \; ...}$$

Se as incertezas das variáveis independentes forem pequenas

$$\alpha_Z^A = \left| f\left(\bar{A}+\alpha_A,\ \bar{B},\ \bar{C},\ ...\right) - f\left(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ ...\right)\right| = \left|\frac{\partial Z}{\partial A}\right| \alpha_A$$

$$\alpha_Z^B = \left| f\left(\bar{A},\ \bar{B}+\alpha_B,\ \bar{C},\ ...\right) - f\left(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ ...\right)\right| = \left|\frac{\partial Z}{\partial B}\right| \alpha_B$$

$$\alpha_Z^C = \left| f\left(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}+\alpha_B,\ ...\right) - f\left(\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C},\ ...\right)\right| = \left|\frac{\partial Z}{\partial C}\right| \alpha_C$$

...

$$\alpha_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial A}\right)^2 (\alpha_A)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\right)^2 (\alpha_B)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial C}\right)^2 (\alpha_C)^2 + \ ...}$$

Representação de uma variável y em função de uma variável x

Relação não-linear

Os pontos distribuem-se sobre uma curva

Procedemos à linearização ou a um ajuste de uma curva

Relação linear

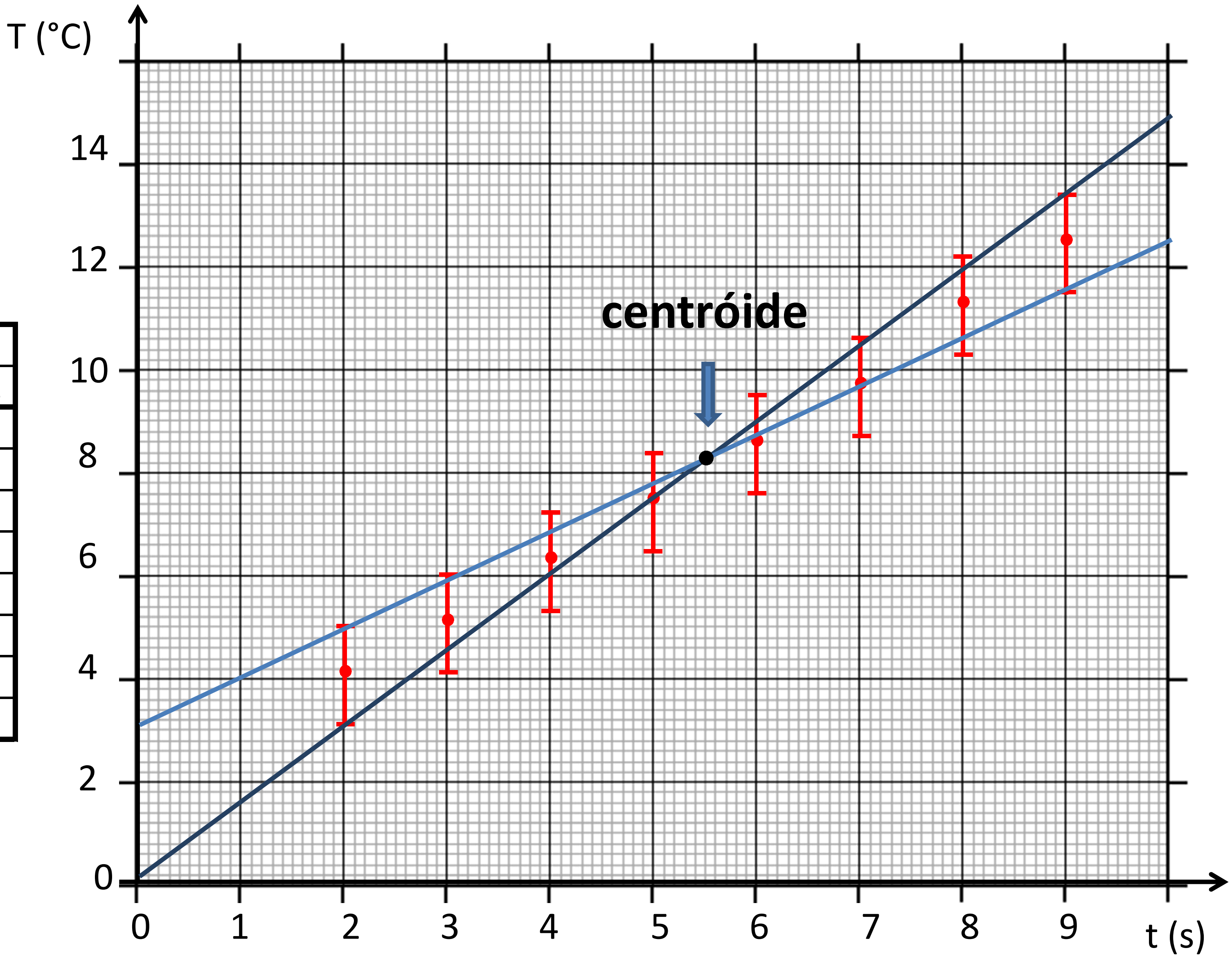
Os pontos distribuem-se sobre uma reta: $y = m\,x + b$

Estimamos os valores de m (declive) e b (ordenada na origem)

- Método gráfico
- Expressões analíticas
- Calculadora gráfica
- Folhas de cálculo (e.g. Excel)

Método gráfico

t / s	T / °C
± 0.6 s	± 1.0 °C
2.0	4.1
3.0	5.1
4.0	6.3
5.0	7.5
6.0	8.5
7.0	9.7
8.0	11.3
9.0	12.5



Para as duas retas calcula-se o declive e a ordenada na origem

$$m_{\max} = \frac{14,8 - 0,2}{10,0 - 0,0} = 1,46 \qquad b_{\min} = 0,2$$

$$m_{\min} = \frac{12,4 - 3,0}{10,0 - 0,0} = 0,94 \qquad b_{\max} = 3,0$$

$$m \pm \Delta m = \frac{1,46 + 0,94}{2} \pm \frac{1,46 - 0,94}{2}$$

$$b \pm \Delta b = \frac{3,0 + 0,2}{2} \pm \frac{3,0 - 0,2}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m = 1,2 \pm 0,3 \\ b = 1,6 \pm 1,4 \end{array}}$$

Expressões analíticas (método dos mínimos quadrados)

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} \qquad \alpha_m = \alpha_{\mathrm{CU}}\sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} \qquad \alpha_b = \alpha_{\mathrm{CU}}\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}$$

$$\Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$\alpha_{\mathrm{CU}} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum\left(y_i - m\,x_i - b\right)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m \pm \alpha_m \\ b \pm \alpha_b \end{array}}$$

O método dos mínimos quadrados não responde à questão:

Serão os dados consistentes com uma linha reta?

Qualidade do ajuste linear

- **2/3 dos pontos estão sobre a reta de ajuste**, dentro das barras de erro
- dos outros pontos, **metade estão acima da linha**, **metade estão abaixo**

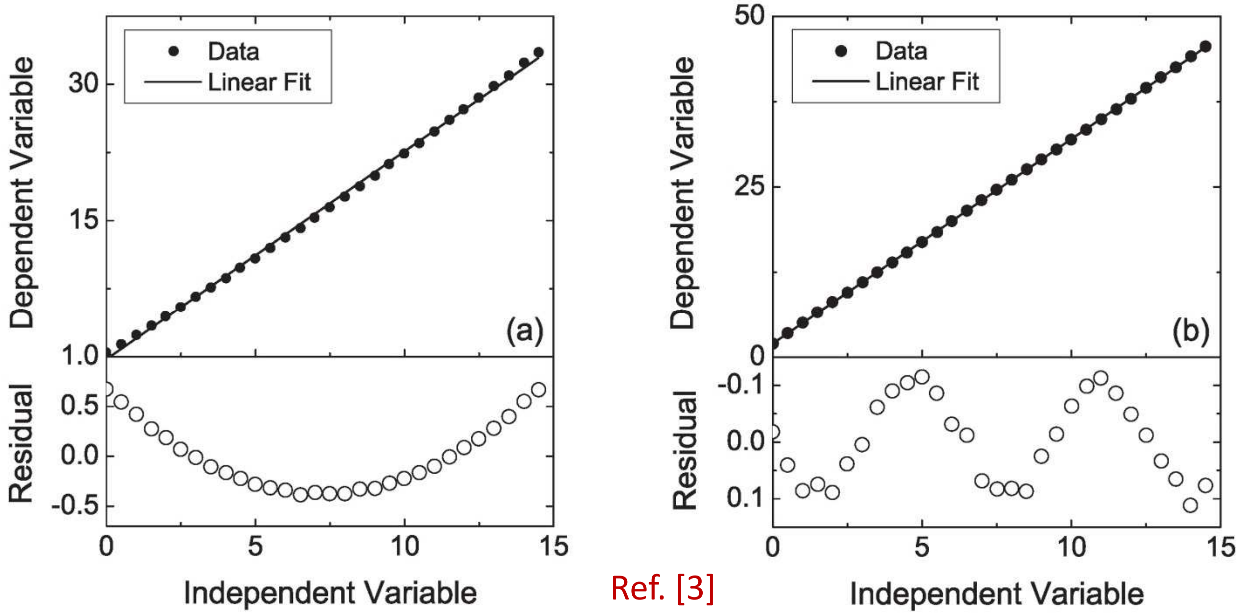
É muito útil fazer o gráfico dos **resíduos** $r_i = y_i - y(x_i)$

[Figura] Conjunto de dados com ajuste linear.
As barras de erro são demasiado pequenas para serem vistas.

Em ambos os casos, uma inspeção visual sugere um bom ajuste. **Mas, os gráficos dos resíduos revelam estruturas**. No modelo deve ser incluído

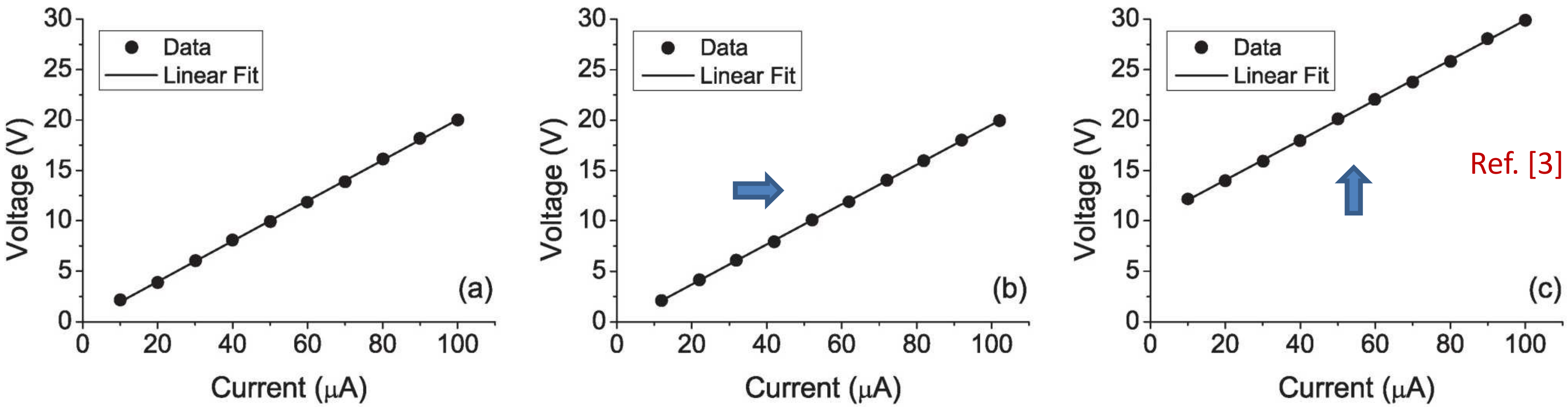
(a) termos quadráticos

(b) uma variação sinusoidal



Ref. [3]

Uso de gráficos para determinar erros sistemáticos



Três experiências para determinar o valor de uma resistência

(a) **Voltímetro e amperímetro calibrados**

$$m = (200 \pm 2)\,\mathrm{k\Omega} \mid b = (0{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{V}$$

(b) **Amperímetro com erro de calibração**

$$m = (200 \pm 2)\,\mathrm{k\Omega} \mid b = (-0{,}26 \pm 0{,}06)\,\mathrm{V}$$

(c) **Voltímetro com erro de calibração**

$$m = (200 \pm 2)\,\mathrm{k\Omega} \mid b = (10{,}09 \pm 0{,}09)\,\mathrm{V}$$

Referências

[1] IPQ e INMETRO, **Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM)**, 2012

[2] M C Abreu, L Matias e L F Peralta, **Física Experimental – Uma introdução**, Editorial Presença, 1994

[3] I G Hughes e T P A Hase, **Measurements and their Uncertainties**, Oxford, 2010

[4] http://www.stefanelli.eng.br/webpage/metrologia/i-metrologia.html

Determinar a massa volúmica de uma esfera de aço

Steel

From Wikipedia, the free encyclopedia

For other uses, see Steel (disambiguation).

Steel is an alloy of iron and other elements, including carbon. When carbon is the primary alloying element, its content in the steel is between 0.002% and 2.1% by weight. The following elements are always present in steel: carbon, manganese, phosphorus, sulfur, silicon, and traces of oxygen, nitrogen and aluminum. Alloying elements intentionally added to modify the characteristics of steel include: manganese, nickel, chromium, molybdenum, boron, titanium, vanadium and niobium.[1]

The density of steel varies based on the alloying constituents but usually ranges between 7,750 and 8,050 kg/m^3 (484 and 503 lb/cu ft), or 7.75 and 8.05 g/cm^3 (4.48 and 4.65 oz/cu in).[4]

Densidade do aço

Determinar a área, o volume e a densidade de uma folha de papel A4 80g/m²

Tamanhos de papel das séries A, B e C, da norma ISO 216 (em milímetros):

série A		série B		série C	
4A0	1682 × 2378	–	–	–	–
2A0	1189 × 1682	–	–	–	–
A0	841 × 1189	B0	1000 × 1414	C0	917 × 1297
A1	594 × 841	B1	707 × 1000	C1	648 × 917
A2	420 × 594	B2	500 × 707	C2	458 × 648
A3	297 × 420	B3	353 × 500	C3	324 × 458
A4	**210 × 297**	B4	250 × 353	C4	229 × 324
A5	148 × 210	B5	176 × 250	C5	162 × 229
A6	105 × 148	B6	125 × 176	C6	114 × 162
A7	74 × 105	B7	88 × 125	C7	81 × 114
A8	52 × 74	B8	62 × 88	C8	57 × 81
A9	37 × 52	B9	44 × 62	C9	40 × 57
A10	26 × 37	B10	31 × 44	C10	28 × 40

A tolerância especificada pela norma é de:

- ±1.5 mm para dimensões até 150 mm,
- ±2 mm para medidas de 150 a 600 mm, e
- ±3 mm para dimensões acima de 600 mm.